Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 36, No. 13, pp. 3229–3236, 1993
Printed in Great Britain

0017–9310/93 $6.00+0.00

Couche limite laminaire autour d'un corps déformable animé d'un mouvement non uniforme avec transfert de chaleur

R. ASKOVIC
Laboratoire de Mécanique des Fluides, Université de Valenciennes, France

(*Reçu septembre* 1992 *et sous forme finale février* 1993)

Résumé—Le présent travail étudie la couche limite thermique laminaire autour d'un corps déformable animé d'un mouvement non uniforme rectiligne $U_e(x, t) = W(t) \cdot V(x, t)$. Tout d'abord, on présente une universalisation des équations des deux couches limites, dynamique et thermique, dans le sens que ni les équations ni les conditions aux limites correspondantes ne dépendent de données du problème particulier. Cette universalisation est faite en transférant les ensembles de paramètres de forme, exprimant l'influence tant du type de mouvement non uniforme du corps le long d'une trajectoire rectiligne dans un fluide initialement au repos que de la déformabilité du corps, en nouvelles variables. Les solutions des équations universelles de la couche limite sont ensuite représentées sous la forme de séries par rapport aux paramètres mentionnés. Finalement, la méthode proposée est appliquée pour discuter la couche limite, dynamique et thermique, autour d'un cylindre circulaire dont le rayon grandit an cours du temps, mis simultanément en mouvement uniforme de translation, avec les résultats satisfaisants.

INTRODUCTION

ON ADMET le plus souvent dans la théorie de la couche limite instationnaire que la vitesse de l'écoulement extérieur à potentiel est représentée sous la forme suivante :

$$U_e(x,t) = W(t) \cdot V(x)$$

donc avec les coordonnées (temporelle t et longitudinale x) séparées où $W(t)$ définit le type de mouvement non uniforme du corps le long d'une trajectoire rectiligne dans un fluide initialement au repos, tandis que la forme du corps (non déformable!) intervient à travers la fonction $V(x)$. Le cas plus général, avec la fonction $U_e(x, t)$ quelconque, a été traité beaucoup plus rarement, par des méthodes paramétriques approchées par exemple [1]. Ou encore, il y a eu quelques essais—dans le cas d'un écoulement laminaire d'un fluide non conducteur [2, 3] ou conducteur [4]—autour des corps déformables, où la fonction V doit cependant dépendre implicitement des deux variables (x, t) c'est à dire où la vitesse de l'écoulement extérieur à potentiel se présente comme suit :

$$U_e(x,t) = W(t) \cdot V(x,t). \tag{1}$$

Le but du présent travail est d'étudier l'écoulement autour d'un corps déformable animé d'un mouvement non uniforme avec transfert de chaleur où la vitesse de l'écoulement extérieur à potentiel est justement représentée par (1).

ANALYSE MATHEMATIQUE

On considère le cas de l'écoulement laminaire d'un fluide à propriétés physiques ρ et μ constantes. Cette condition est par exemple satisfaite pour l'air, en bonne approximation, dans un écoulement où les vitesses ne dépassent pas 50 m s^{-1} et où les différences de température dans le fluide restent en dessous de 50 K environ. Alors les équations de la couche limite thermique autour d'un corps déformable animé d'un mouvement non uniforme le long d'une trajectoire rectiligne peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U_e}{\partial t}+U_e\frac{\partial U_e}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{4}$$

Les conditions initiales et limites sont :

1) *Pour la partie dynamique*

$$\left.\begin{array}{lll} t=0: & u=U_e(x,t), \quad v=0 & \text{pour} \quad y=0; \\ t\geqslant 0: & \begin{cases} u=v=0 \\ u\to U_e(x,t) \end{cases} & \begin{array}{l}\text{pour} \quad y=0; \\ \text{pour} \quad y\to\infty;\end{array} \end{array}\right\} \tag{5}$$

où compte tenu de la déformabilité du corps, la fonction $U_e(x, t)$ est présentée par (1) ;

2) *Pour la partie thermique*

(a) *Dans le cas athermane* (*problème du thermomètre*)

NOTATIONS

c_p	chaleur spécifique du fluide	x	coordonnée longitudinale
Pr	nombre de Prandtl, $(\mu \cdot c_p/\lambda)$	y	coordonnée normale.
T	température absolue du fluide		
t	coordonnée temporelle	Symbol grecs	
u	composante longitudinale de vitesse dans la couche limite	λ	conductivité thermique du fluide
v	composante normale de vitesse dans la couche limite	μ	viscosité dynamique ($\nu = (\mu/\rho)$ viscosité cinématique) du fluide
		ρ	densité du fluide.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0, \quad T \to T_\infty \text{ pour } y \to \infty\,; \quad (6)$$

(b) *Dans le cas d'un problème de réchauffement ou de refroidissement*

$$T = T_p \text{ pour } y = 0, \quad T \to T_\infty \text{ pour } y \to \infty. \quad (7)$$

Les fonctions $W(t)$ et $V(x, t)$ sont des fonctions de la classe C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, dans le domaine considéré.

PARTIE DYNAMIQUE

Dans le cas considéré de propriétés physiques ρ et μ constantes, la partie dynamique représentée par les équations (2) et (3) est indépendante de l'équation (4) de l'énergie. Cela veut dire que la partie dynamique peut être traitée indépendamment de la partie thermique de la couche limite.

Si l'on introduit la fonction de courant $\Psi(x, y, t)$ telle que :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (8)$$

alors le système de deux équations (2) et (3) se réduit en une seule :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}, \quad (9)$$

avec les conditions suivantes

$$\left.\begin{aligned} t = 0:&\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_e(x, t), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } y = 0\,; \\ t \geqslant 0:&\ \begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 & \text{pour } y = 0\,; \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \to U_e(x, t) & \text{pour } y \to \infty\,; \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

où $U_e(x, t)$ est présenté par (1) en tenant compte de la déformabilité du corps.

Le calcul de la couche limite en régime instationnaire peut être basé sur l'équation intégrale de quantité de mouvement de la couche limite sur une plaque plane pour une vitesse extérieure non uniforme $W(t)$. Ainsi donc si l'on intègre l'équation (2) par rapport à y entre 0 et ∞, on obtiendra, après quelques transformations, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dz_p}{dt} = 2H, \quad (11)$$

où

$$H = \zeta_p - g_1, \quad g_1 = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} z_p, \quad \zeta_p = \left[\frac{\partial (u/W)}{\partial (y/\delta_1)}\right]_{y=0},$$

$$z_p = \frac{\delta_1^2}{\nu}.$$

Ici

$$\delta_1(t) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{W}\right) dy$$

représente l'épaisseur de déplacement de la couche limite sur une plaque plane.

Introduisons maintenant les nouvelles variables : d'abord, une variable normale :

$$\eta = A \frac{y}{\delta_1} \quad (12)$$

où A est une constante, et ensuite, dans le sens de la méthode paramétrique de Loitsianski [5] d'universalisation des équations de la couche limite, au lieu des variables x et t, trois ensembles infinis de paramètres de forme.

$$\left.\begin{aligned} g_k &= \frac{1}{W}\frac{d^k W}{dt^k} z_p^k, \\ p_k^n &= W^n V^{n-1} \frac{\partial^{k+n} V}{\partial x^n\, \partial t^k} z_p^{k+n}, \\ \gamma_k^n &= W^k V^{k-1} \frac{\partial^{k+n} V}{\partial x^k\, \partial t^n} z_p^{k+n}. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &k \in (1, 2, \ldots) \\ &n \in (0, 1, \ldots). \end{aligned} \quad (13)$$

En effet, l'idée d'universalisation des équations et des conditions aux limites correspondantes (9) et (10) consiste à les rendre indépendantes des fonctions caractérisant chaque cas particulier, cette fois-ci évidemment des fonctions $W(t)$ et $V(x, t)$. Or il faut trouver la façon de les transformer en nouvelles variables et ce sont justement les form-paramètres (13), construits en utilisant de plus la fonction $z_p(t)$.

Au moyen des expressions (11), (12) et (13), on obtient aisément les formules de transformations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{z_p}\left[-H\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(b_k\frac{\partial}{\partial g_k}+c_k^n\frac{\partial}{\partial p_k^n}+d_k^n\frac{\partial}{\partial\gamma_k^n}\right)\right]\\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{WVz_p}\sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(j_k^n\frac{\partial}{\partial p_k^n}+r_k^n\frac{\partial}{\partial\gamma_k^n}\right),\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

où:

$$\left.\begin{aligned}b_k &= (2kH-g_1)g_k+g_{k+1},\\ c_k^n &= [ng_1+(n-1)p_1^0+2H(k+n)]p_k^n+p_{k+1}^n,\\ d_k^n &= [kg_1+(k-1)p_1^0+2H(k+n)]\gamma_k^n+\gamma_{k+1}^n,\\ j_k^n &= (n-1)\gamma_1^0p_k^n+p_k^{n+1},\\ r_k^n &= (k-1)\gamma_1^0\gamma_k^n+\gamma_{k+1}^n.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Cherchons la solution de l'équation (9) sous la forme suivante:

$$\Psi(x,y,t) = \frac{1}{A}\delta_1(t)W(t)V(x,t)\cdot F(\eta,g_k,p_k^n,\gamma_k^n), \quad (16)$$

où F est une fonction réelle, continue et infiniment dérivable par rapport à toutes ses variables dans le domaine considéré. Après l'introduction de l'expression (16) dans l'équation (9), on obtient:

$$\begin{aligned}&A^2\frac{\partial^3F}{\partial\eta^3}+H\eta\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}+\gamma_1^0\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)^2\right.\\ &\left.+F\left(\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right)\right]+(g_1+p_1^0)\left(1-\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)\\ &=\sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(b_k\frac{\partial^2F}{\partial\eta\,\partial g_k}+c_k^n\frac{\partial^2F}{\partial\eta\,\partial p_k^n}+d_k^n\frac{\partial^2F}{\partial\eta\,\partial\gamma_k^n}\right)\\ &+\sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left[j_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2F}{\partial\eta\,\partial p_k^n}-\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\frac{\partial F}{\partial p_k^n}\right)\right.\\ &\left.+r_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2F}{\partial\eta\,\partial\gamma_k^n}-\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\frac{\partial F}{\partial\gamma_k^n}\right)\right],\end{aligned} \quad (17)$$

avec les conditions aux limites:

$$F=\frac{\partial F}{\partial\eta}=0 \text{ pour } \eta=0, \quad \frac{\partial F}{\partial\eta}\to 1 \text{ pour } \eta\to\infty. \quad (18)$$

Puisque ni l'équation (17) ni les conditions (18) ne dépendent des données particulières du problème considéré, cela signifie que cette équation est universelle dans le sens de Loitsianski [5] et peut être intégrée une fois pour toutes.

Il reste cependant à résoudre séparément, pour $W(t)$ donné, l'équation différentielle ordinaire (11), afin de trouver la fonction $z_p(t)$, c'est à dire $\delta_1(t)$ figurant dans les nouvelles variables (12) et (13).

L'équation universelle paramétrique (17) peut être intégrée soit numériquement avec un ordinateur soit en développant la fonction inconnue F en série des paramètres g_k, γ_k^n, p_k^n. Pour le moment nous avons trouvé la solution de l'équation (17) sous la forme d'un développement en série:

$$\begin{aligned}F = F_0(\eta,g_k)&+\gamma_1^0F_{1a}(\eta,g_k)+p_1^0F_{1b}(\eta,g_k)\\ &+(\gamma_1^0)^2F_{11a}(\eta,g_k)+(p_1^0)^2F_{11b}(\eta,g_k)\\ &+\gamma_1^0p_1^0F_{12}(\eta,g_k)+\cdots\end{aligned} \quad (19)$$

Si l'on représente, ensuite, les fonctions F_0, F_{1a}, F_{1b},... etc. sous forme de séries vis-à-vis des variables g_k:

$$\left.\begin{aligned}F_0 &= f_{0,0}(\eta)+g_1f_{0,1}(\eta)+g_1^2f_{0,11}(\eta)\\ &\quad+g_2f_{0,2}(\eta)+\cdots\\ F_{1a} &= f_{1a,0}(\eta)+g_1f_{1a,1}(\eta)+g_1^2f_{1a,11}(\eta)\\ &\quad+g_2f_{1a,2}(\eta)+\cdots\\ F_{1b} &= f_{1b,0}(\eta)+g_1f_{1b,1}(\eta)+g_1^2f_{1b,11}(\eta)\\ &\quad+g_2f_{1b,2}(\eta)+\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

(où les indices des fonctions $f_{i...j}$ servent seulement à les distinguer) et la fonction H comme suit:

$$H = H_0+H_1g_1+H_{11}g_1^2+H_2g_2+\cdots \quad (21)$$

on aura un système récursif d'équations différentielles ordinaires pour les fonctions universelles dépendant de η:

$$\begin{aligned}&L_0(f_{0,0}) = 0,\\ &L_1(f_{0,1}) = A^{-2}(f'_{0,0}-H_1\eta f''_{0,0}-1),\\ &L_2(f_{0,11}) = A^{-2}(2H_1f'_{0,1}-H_1\eta f''_{0,1}-H_{11}\eta f''_{0,0}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &L_1(f_{1a,0}) = A^{-2}(f'^2_{0,0}-f_{0,0}f''_{0,0}-1),\\ &L_2(f_{1a,1}) = A^{-2}[2(H_1+1)f'_{1a,0}-H_1\eta f''_{1a,0}\\ &\qquad+2f'_{0,0}f'_{0,1}-f_{0,1}f''_{0,1}-f_{0,1}f''_{0,0}],\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &L_1(f_{1b,0}) = A^{-2}(f'_{0,0}-1),\\ &L_2(f_{1b,1}) = A^{-2}[(2H_1+1)f'_{1b,0}+f'_{0,1}-H_1\eta f'_{1b,0}],\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

où L_k est un opérateur différentiel linéaire:

$$L_k = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\eta^3}+\frac{H_0}{A^2}\eta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}-2\frac{H_0}{A^2}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}.$$

Les conditions aux limites sont :

$$f_{0.0}(0) = f'_{0.0}(0) = 0, \quad f'_{0.0}(\infty) = 1,$$

$$f_{0.1}(0) = f_{0.11}(0) = \cdots = f'_{0.1}(0) = f'_{0.11}(0)$$
$$= \cdots = f'_{0.1}(\infty) = f'_{0.11}(\infty) = \cdots = 0.$$

Si l'on adapte les fonctions (19) et (20) à une plaque plane et tenant compte de la relation (11), il est possible de déterminer les coefficients dans la série (21) :

$$H_0 = Af''_{0.0}(0), \quad H_1 = Af''_{0.1}(0)-1,$$
$$H_{11} = Af''_{0.11}(0), \ldots \tag{22}$$

D'autre part, si l'on veut que les équations différentielles ordinaires ci-dessus deviennent du type parabolique, résolvables analytiquement [6], il convient de choisir que : $H_0/A^2 = 2$. Les solutions analytiques ainsi trouvées peuvent être présentées à l'aide des fonctions de Weber ou de cylindre parabolique, liées à l'intégrale de la fonction de Gauss $g_\alpha(\eta)$ comme suit :

$$g_\alpha(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{(1/2)-\alpha} e^{-(1/2)\eta^2} D_{-1-2\alpha}(\eta\sqrt{2}).$$

Voici maintenant quelques unes de ces solutions :

$$f_{0.0}(\eta) = \eta + g_{1/2}(\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$f'_{0.1}(\eta) = A^{-2}\left[\tfrac{1}{4}g_0(\eta) + \frac{1}{16}H_1 g_{-1}(\eta) - g_1(\eta)\right],$$

$$f'_{0.11}(\eta) = \left(\frac{1}{24A^2}H_{11} - \frac{1}{48A^4}H_1^2 - \frac{1}{96A^4}H_1\right)$$
$$\times g_{-1}(\eta) - \frac{1}{512A^4}H_1^2 g_{-2}(\eta),$$

....

$$f_{1a.0}(\eta) = \frac{\pi}{2}g_0(\eta) - \tfrac{1}{2}(3\pi+\tfrac{4}{3})g_1(\eta) + \frac{\pi}{16}g_{-1}(\eta)$$
$$-\frac{\sqrt{\pi}}{6}g_{-1/2}(\eta) - \frac{\pi}{2}g_0 g_1 + \frac{\pi}{2}g_{1/2}^2(\eta),$$

....

$$f_{1b.0}(\eta) = -\pi g_1(\eta) + \frac{\pi}{4}g_0(\eta),$$

....

A l'aide de ces solutions analytiques, d'une part, et des formules (22), d'autre part, on peut donc calculer les constantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad H_0 = \frac{2}{\pi}, \quad H_1 = -\tfrac{2}{3}, \quad H_{11} = \frac{\pi}{72}, \ldots$$

Cependant, comme on l'a constaté précédemment, pour chaque cas d'écoulement particulier il faudra résoudre encore l'équation différentielle (11), c'est à dire :

$$\frac{dz_p}{dt} = 2(H_0 + H_1 g_1 + H_{11} g_1^2 + H_2 g_2 + \cdots).$$

Bien que l'on puisse, en principe, résoudre cette équation différentielle non linéaire numériquement, il est parfois plus rationnel de la linéariser en négligeant, en première approximation, le terme en z_p^2 et les termes suivants d'ordre supérieur (la 'simple solution'). On obtient ainsi la solution recherchée $z_p(t)$ exprimée par l'intégrale :

$$z_p(t) = \frac{4}{\pi} W^{-4/3} \int_0^t W^{4/3}\, dt, \tag{23}$$

pouvant être calculé facilement pour chaque $W(t)$ particulier, comme on va le voir par la suite.

Exemple: Pour illustrer la méthode, exposée précédemment, prenons un cylindre circulaire dont le rayon R (de longueur initiale R_0) grandit au cours du temps avec une accélération a constante $R = R_0(1+at)$, étant mis à la fois brusquement en mouvement uniforme de translation le long d'une trajectoire rectiligne avec une vitesse U_∞, dans un fluide incompressible initialement au repos. On a donc :

$$U_e(x,t) = 2U_\infty \sin\frac{x}{R_0(1+at)}, \tag{24}$$

ou bien :

$$W(t) = U_\infty, \quad V(x,t) = 2\sin\frac{x}{R_0(1+at)}.$$

A l'aide de (13) et (23), on obtient :

$$\left.\begin{aligned} z_p(t) = \frac{4}{\pi}t, \quad g_1 = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}z_p = 0, \quad \theta = \frac{x}{R_0(1+at)}, \\ p_1^0 = -\frac{4}{\pi}\frac{at}{1+at}\theta \operatorname{ctg}\theta, \quad \gamma_1^0 = \frac{8}{\pi}\frac{U_\infty}{R_0}\frac{t}{1+at}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

A partir de la condition de décollement de la couche limite $(\partial u/\partial y)_{y=0} = 0$ dans le cas de la 'simple solution' on constate que le point de décollement sur l'obstacle du cops est déterminé par :

$$f''_{0.0}(0) + \gamma_1^0 f''_{1a.0}(0) + p_1^0 f''_{1b.0}(0) = 0, \tag{26}$$

où :

$$f''_{0.0}(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad f''_{1a.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1+\frac{4}{3\pi}\right),$$
$$f''_{1b.0}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En rapportant (25) dans (26), il s'ensuit que la distance parcourue par le cylindre ($s_{dec} = U_\infty t_{dec}$) jusqu'au moment du décollement qui apparait en un point sur la surface du cylindre désigné par l'angle θ par rapport au point d'arrêt en amont, est représentée par :

Tableau 1. Influence du paramètre de déformabilité du cylindre sur le premier décollement de la couche limite

θ_m°	180	170	160	150	140	130	122,9	120
α	0	0,0047	0,0366	0,1167	0,2570	0,4638	0,6479	0,7322
s_{min}	0,351	0,3670	0,4320	0,5490	0,8510	2,0630	1496,78	—

$$\frac{s_{dec}}{R_0} = s = \frac{1}{\alpha(\theta \operatorname{ctg} \theta - 1) - 2\left(1 + \dfrac{4}{3\pi}\right)\cos\theta}, \quad (27)$$

où le paramètre

$$\alpha = \frac{aR_0}{U_\infty} = \frac{\mathrm{d}R/\mathrm{d}t}{U_\infty}$$

définit, évidemment, le rapport des deux vitesses—celle de déformation du cylindre $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$ contre la vitesse à l'infini amont U_∞. Si l'on comprend la relation (27) comme s en fonction de θ, alors en cherchant le minimum de cette fonction, il vient :

$$\alpha = 2\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)\frac{(\sin\theta_m)^3}{(\theta_m - \sin\theta_m \cos\theta_m)}, \quad (28)$$

θ_m étant la solution de l'équation $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\theta = 0$.

Ainsi donc les deux relations (27) et (28) déterminent le premier décollement de la couche limite sur un cylindre circulaire déformable en fonction du paramètre α. Le Tableau 1, en annexe, présente les résultats d'une analyse numérique. On voit dans ce tableau qu'une augmentation du paramètre α fait croître la distance parcourue par le cylindre jusqu'au premier décollement. Pour $\alpha \approx 0,648$ environ, le premier décollement de la couche limite se passe à $\theta_m = 123^\circ$, après un parcours du cylindre s_{dec} égal pratiquement à l'infini, c'est à dire jamais! Pour des valeurs du paramètre α plus élevées, on obtient les parcours du cylindre négatifs ce qui ne correspond pas à la réalité [2]. De plus, si l'on applique un champ magnétique extérieur, la distance de décollement s_{dec} croît davantage, d'autant plus d'ailleurs que le nombre de Stuart sera plus grand, ce qui pourrait être bien utile du coté pratique [4].

A noter encore que la solution (27), obtenue ci-dessus, reconfirme le résultat classique bien connu [7] de Blasius, concernant le premier décollement sur un cylindre non déformable: $s_{dec} = 0,351\ R_0$, ce qui témoigne, on l'espère bien, en faveur de la méthode proposée ici.

PARTIE THERMIQUE

Si l'on remplace les composantes de la vitesse (8), calculées à partir de (16), dans l'équation de l'énergie (4), on aura :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + WV\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\delta_1}{Az_p}\left[\gamma_1^0 F + \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(j_k^n \frac{\partial F}{\partial p_k^n} + r_k^n \frac{\partial F}{\partial \gamma_k^n}\right)\right]\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\lambda}{\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{A^2}{c_p}\frac{W^2V^2}{z_p}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)^2. \quad (29)$$

Problème du thermomètre

Cherchons la solution de l'équation (29), tenant compte des conditions aux limites (6), sous la forme :

$$T(x, y, t) = T_\infty + \frac{W^2V^2}{c_p} Q(\eta, g_k, p_k^n, \gamma_k^n, Pr). \quad (30)$$

Après l'introduction de (30) dans (29), on constate que la fonction inconnue Q vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{A^2}{Pr}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + H\eta\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \gamma_1^0 F\frac{\partial Q}{\partial \eta} &+ \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left[j_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial p_k^n}\frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial p_k^n}\right) + r_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_k^n}\frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial \gamma_k^n}\right)\right] \\ &- \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(b_k\frac{\partial Q}{\partial g_k} + c_k^n\frac{\partial Q}{\partial p_k^n} + d_k^n\frac{\partial Q}{\partial \gamma_k^n}\right) \\ &- 2\gamma_1^0\frac{\partial F}{\partial \eta}Q - 2(g_1 + p_1^0)Q = -A^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

avec les conditions aux limites :

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0 \text{ pour } \eta = 0, \quad Q \to 0 \text{ pour } \eta \to \infty. \quad (32)$$

Si l'on cherche la solution de cette équation, comme dans la partie dynamique, par les développements en séries :

$$\begin{aligned} Q = {} & Q_0(\eta, g_k) + \gamma_1^0 Q_{1a}(\eta, g_k) + p_1^0 Q_{1b}(\eta, g_k) \\ & + \gamma_1^0 p_1^0 Q_{12}(\eta, g_k) + (\gamma_1^0)^2 Q_{11a}(\eta, g_k) \\ & + (p_1^0)^2 Q_{11b}(\eta, g_k) + \cdots \end{aligned} \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= Q_{0,0}(\eta) + g_1 Q_{0,1}(\eta) + g_1^2 Q_{0,11}(\eta) \\ &\quad + g_2 Q_{0,2}(\eta) + \cdots \\ Q_{1a} &= Q_{1a,0}(\eta) + g_1 Q_{1a,1}(\eta) + g_1^2 Q_{1a,11}(\eta) \\ &\quad + g_2 Q_{1a,2}(\eta) + \cdots \\ Q_{1b} &= Q_{1b,0}(\eta) + g_1 Q_{1b,1}(\eta) + g_1^2 Q_{1b,11}(\eta) \\ &\quad + g_2 Q_{1b,2}(\eta) + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

où les indices dans les fonctions $Q_{i\ldots j}$ servent juste à les distinguer, alors il s'ensuit une succession d'équations diférentielles ordinaires du deuxième ordre :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{Pr}Q''_{0,0} + 2\eta Q'_{0,0} = -f''^2_{0,0}, \\ &\frac{1}{Pr}Q''_{1a,0} + 2\eta Q'_{1a,0} - 4Q_{1a,0} = A^{-2}(2f'_{0,0}Q_{0,0} \\ &\quad - f_{0,0}Q'_{0,0}) - 2f''_{0,0}f''_{1a,0}, \\ &\frac{1}{Pr}Q''_{1b,0} + 2\eta Q'_{1b,0} - 4Q_{1b,0} = 2A^{-2}Q_{0,0} \\ &\quad - 2f''_{0,0}f''_{1b,0}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

avec les conditions aux limites correspondantes :

$$\left.\begin{array}{l} Q'_{0,0}(0) = Q'_{1a,0}(0) = Q'_{1b,0}(0) = \cdots = 0, \\ Q_{0,0}(\infty) = Q_{1a,0}(\infty) = Q_{1b,0}(\infty) = \cdots = 0. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (36)$$

Problème du réchauffement ou du refroidissement

Si l'on suppose cette fois-ci que la solution de l'équation (29), compte tenu des conditions aux limites (7) est de la forme :

$$T(x,y,t) = T_\infty + \frac{W^2V^2}{c_p}\overset{*}{K}(\eta, g_k, p_k^n, \gamma_k^n, Pr) + (T_p - T_\infty)\overset{**}{K}(\eta, g_k, p_k^n, \gamma_k^n, Pr), \quad (37)$$

alors il est ainsi possible, encore une fois, de ramener cette équation (29) aux deux équations universelles suivantes avec les conditions aux limites correspondantes :

$$\frac{A^2}{Pr}\frac{\partial^2\overset{*}{K}}{\partial\eta^2} + H\eta\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\eta} + \gamma_1^0 F\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\eta} + \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left[j_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial p_k^n}\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\eta} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial p_k^n}\right) + r_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma_k^n}\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\eta} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\gamma_k^n}\right)\right]$$

$$- \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(b_k\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial g_k} + c_k^n\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial p_k^n} + d_k^n\frac{\partial\overset{*}{K}}{\partial\gamma_k^n}\right)$$

$$-2\gamma_1^0\frac{\partial F}{\partial\eta}\overset{*}{K} - 2(g_1 + p_1^0)\overset{*}{K} = -A^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right)^2 \quad (38)$$

$$\overset{*}{K} = 0 \text{ pour } \eta = 0, \quad \overset{*}{K} \to 0 \text{ pour } \eta \to \infty. \quad (39)$$

$$\frac{A^2}{Pr}\frac{\partial^2\overset{**}{K}}{\partial\eta^2} + H\eta\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\eta} + \gamma_1^0 F\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\eta} + \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left[j_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial p_k^n}\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\eta} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial p_k^n}\right) + r_k^n\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma_k^n}\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\eta} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\gamma_k^n}\right)\right]$$

$$- \sum_{k=1,n=0}^{\infty}\left(b_k\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial g_k} + c_k^n\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial p_k^n} + d_k^n\frac{\partial\overset{**}{K}}{\partial\gamma_k^n}\right) = 0, \quad (40)$$

$$\overset{**}{K} = 0 \text{ pour } \eta = 0, \quad \overset{**}{K} \to 0 \text{ pour } \eta \to \infty. \quad (41)$$

Par analogie avec le cas athermane, en appliquant le procédé de développements en séries :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{*}{K} = \overset{*}{K}_0(\eta, g_k) + \gamma_1^0\overset{*}{K}_{1a}(\eta, g_k) + p_1^0\overset{*}{K}_{1b}(\eta, g_k) + \cdots \\ \overset{*}{K}_0 = \overset{*}{K}_{0,0}(\eta) + g_1\overset{*}{K}_{0,1}(\eta) + g_1^2\overset{*}{K}_{0,11}(\eta) + \cdots \\ \overset{*}{K}_{1a} = \overset{*}{K}_{1a,0}(\eta) + g_1\overset{*}{K}_{1a,1}(\eta) + g_1^2\overset{*}{K}_{1a,11}(\eta) + \cdots \\ \overset{*}{K}_{1b} = \overset{*}{K}_{1b,0}(\eta) + g_1\overset{*}{K}_{1b,1}(\eta) + g_1^2\overset{*}{K}_{1b,11}(\eta) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{**}{K} = \overset{**}{K}_0(\eta, g_k) + \gamma_1^0\overset{**}{K}_{1a}(\eta, g_k) + p_1^0\overset{**}{K}_{1b}(\eta, g_k) + \cdots \\ \overset{**}{K}_0 = \overset{**}{K}_{0,0}(\eta) + g_1\overset{**}{K}_{0,1}(\eta) + g_1^2\overset{**}{K}_{0,11}(\eta) + \cdots \\ \overset{**}{K}_{1a} = \overset{**}{K}_{1a,0}(\eta) + g_1\overset{**}{K}_{1a,1}(\eta) + g_1^2\overset{**}{K}_{1a,11}(\eta) + \cdots \\ \overset{**}{K}_{1b} = \overset{**}{K}_{1b,0}(\eta) + g_1\overset{**}{K}_{1b,1}(\eta) + g_1^2\overset{**}{K}_{1b,11}(\eta) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (43)$$

on peut également ramener ces deux équations (38) et (40) aux dérivées partielles aux équations différentielles ordinaires pour les fonctions inconnues, introduites ci-dessus, dépendant de η, avec les conditions aux limites correspondantes.

A noter que toutes ces équations différentielles ordinaires pour les fonctions dépendant de η peuvent être résolues même analytiquement, comme dans la partie dynamique ci-devant, mais il est préférable et plus commode en pratique de les résoudre numériquement pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl Pr.

Estimation qualitative du transfert de chaleur autour d'un corps déformable

Pour faire une première évaluation du transfert de chaleur autour d'un corps déformable, on peut simplifier la solution déjà trouvée (33) du problème de thermomètre en négligeant en première approximation les termes non linéaires :

$$(T - T_\infty) = \frac{1}{c_p}(WV)^2(Q_0 + \gamma_1^0 Q_{1a} + p_1^0 Q_{1b}).$$

La combinaison de la solution $(T - T_\infty)$, ainsi simplifiée, de l'équation de l'énergie inhomogène, avec un multiple de la solution $(T - T_\infty)$ de l'équation homogène :

$$(T - T_\infty) = C\overset{**}{K} + \frac{1}{c_p}(WV)^2 Q,$$

ou encore, en première approximation :

$$(T - T_\infty) = C\overset{**}{K}_{0,0}(\eta) + \frac{1}{c_p}(WV)^2[Q_{0,0}(\eta) + \gamma_1^0 Q_{1a,0}(\eta) + p_1^0 Q_{1b,0}(\eta)], \quad (44)$$

représente la solution la plus générale qui doit encore satisfaire la condition pariétale : $T(0) = T_p$. Cette condition pariétale, combinée avec l'expression pour la 'température de frottement' du cas athermane $T_f = (T)_{y=0}$, calculée avec (30), en tenant compte des valeurs numériques :

$$\overset{**}{K}_{0,0}(0) = 1, \quad Q_{0,0}(0) = \tfrac{1}{2},$$

$$Q_{1a,0}(0) = 0 \quad \text{et} \quad Q_{1b,0}(0) = -\frac{\pi}{8},$$

nous donne à partir de (44)

$$\left(\frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty}\right) = (1-\Delta)\overset{**}{K}_{0,0}(\eta)$$

$$+\frac{(WV)^2}{c_p(T_p-T_\infty)}[Q_{0,0}(\eta)+\gamma_1^0 Q_{1a,0}(\eta)+p_1^0 Q_{1b,0}(\eta)], \quad (45)$$

où l'on a introduit un paramètre de transfert de chaleur défini par :

$$\Delta = \frac{(WV)^2}{2c_p(T_p-T_\infty)}\left(1-\frac{\pi}{4}p_1^0\right) \quad (46)$$

qui prend la forme suivante dans le cas d'un cylindre circulaire déformable animé brusquement d'un mouvement uniforme de translation compte tenu de (24) et (25) :

$$\Delta = \frac{2U_\infty^2(\sin\theta)^2}{c_p(T_p-T_\infty)}\left(1+\frac{(U_\infty/R_0)\alpha t}{1+(U_\infty/R_0)\alpha t}\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta\right). \quad (47)$$

La solution (45) nous permet maintenant d'étudier le problème du transfert de chaleur autour d'un cylindre à la fois déformable et mis brusquement en mouvement uniforme de translation le long d'une trajectoire rectiligne.

Tout d'abord, on voit bien que le cas d'une paroi athermane correspond à $\Delta = 1$.

Puis, il est plus commode d'analyser par la suite le transfert de chaleur pour les deux régions suivantes autour du cylindre séparément : $0 < \theta \leqslant 90°$ et $90° < \theta < 180°$.

(1) *Dans la région* $0 < \theta \leqslant 90°$

pour $T_p < T_\infty$:

compte tenu que $\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta \geqslant 0$, Δ est toujours négatif d'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{A}{\delta_1}(T_p-T_\infty)(1-\Delta) > 0,$$

car :

$$\overset{**}{K}{}'_{0,0}(0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad Q'_{0,0}(0) = Q'_{1a,0}(0) = Q'_{1b,0}(0) = 0,$$

donc $(\partial T/\partial y)_{y=0}$ est positif et on a, comme c'est physiquement évident, toujour un *flux de chaleur du fluide vers la paroi de l'obstacle* ;

pour $T_p > T_\infty$

—on a $(\partial T/\partial y)_{y=0} < 0$ pour $\Delta < 1$ et, par conséquant, un *flux de claleur de la paroi vers le fluide* ;

—tandis que pour $\Delta > 1$, le signe du gradient de température étant positif $(\partial T/\partial y)_{y=0} > 0$, *la chaleur passera donc du fluide vers la paroi de l'obstacle* ;

(2) *Dans la région* $90° < \theta < 180°$

On peut démontrer, tout d'abord, vue la structure de (47) que pour des valeurs des páramètres concernés ayant un intérêt pratique, en particulier de a et t, en tenant compte que $\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta < 0$, on a l'inégalité suivante :

$$1+\frac{at}{1+at}\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta < 0.$$

Ainsi donc :

pour $T_p > T_\infty$: Δ est toujours négatif, d'où :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{A}{\delta_1}(T_p-T_\infty)(1-\Delta) < 0,$$

donc $(\partial T/\partial y)_{y=0}$ est négatif ce qui veut dire qu'*il y aura un flux de chaleur de la paroi vers le fluide* ;

pour $T_p < T_\infty$

—on a $(\partial T/\partial y)_{y=0} < 0$ pour $\Delta > 1$ et, par conséquent, *un flux de chaleur de la paroi vers le fluide* ;

—mais, par contre, pour $\Delta < 1$, le signe du gradient de température devient positif $(\partial T/\partial y)_{y=0} > 0$ et *la chaleur passera donc du fluide vers la paroi de l'obstacle*.

A noter, enfin, qu'une étude numérique détaillée permettra par la suite d'identifier les rôles particuliers des divers paramètres, notamment de l'accélération a, dans le processus de transfert de chaleur, indiqué cidessus.

CONCLUSION

La fonction de courant (16), avec les solutions analytiques des fonctions universelles correspondantes, permet d'étudier dans le cadre des hypothèses utilisées les phénomènes dynamiques y compris le décollement de la couche limite sur un corps déformable. Ainsi dans le cas d'un cylindre circulaire dont le rayon grandit au cours du temps avec une accélération constante, mis simultanément en mouvement uniforme de translation, on démontre que cette déformabilité du cylindre fait retarder l'apparition du décollement de la couche limite sur le cylindre, ce qui est évidemment d'un intérêt pratique.

De même, les solutions (30) et (37) donnent la possibilité d'analyser encore sous forme détaillée le transfert de chaleur entre un corps déformable mis en mouvement non uniforme et un fluide environnant en fonction des paramètres influents, et en particulier du facteur de déformabilité du corps.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Djukic, Equation universelle de la couche limite instationnaire pour une vitesse extérieure quelconque (en yougoslave), *Mat. vesnik* **8**(23) (1971).
2. J. Jovanovic et R. Askovic, Approximations paramétriques dans la théorie de la couche limite instationnaire appliquées aux écoulements autour des corps déformables, *Théor. Appl. Mech. Beograd* **5**, 35–43 (1979).
3. A. Echchelh, Calcul de la couche limite laminaire autour des corps de révolution déformables, Projet de D.E.A. au Lab. de Mécanique des Fluides de l'Université de Valenciennes, France (1992).

4. R. Askovic, Traitement de la couche limite laminaire magnétohydrodynamique autour des corps déformables, A paraître dans le Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique.
5. L. G. Loitsianski, Equations universelles et approximations paramétriques dans la théorie de la couche limite laminaire (en russe), *Prikl. Mat. Mech.* **29**(1), 70–87 (1965).
6. E. Watson, Boundary layer growth, *Proc. R. Soc., Série A* **231**, 104–116 (1955).
7. H. Blasius, Grenzschichten in flusigkeiten mit kleiner Reubung, *Z. Math. u. Phys.* **56**(1), 1–37 (1908).

A METHOD OF PARAMETRIC APPROXIMATIONS FOR LAMINAR THERMAL BOUNDARY LAYER AROUND A DEFORMABLE BODY

Abstract—The unsteady laminar thermal boundary layer on a deformable body in non-uniform motion $U_e(x, t) = W(t) \cdot V(x, t)$ is discussed. A universalization of the boundary layer equations is first made in the sense that neither equations nor boundary conditions depend on particular problem data. The universality is achieved by transfering sets of parameters which express the influence of time and deformability conditions, characteristic for each particular problem, into the new variables. Subsequently, the solutions of the obtained universal equations of both—dynamic and thermal boundary layers—are found in the form of series expansions in mentioned parameters. Finally, an application of the proposed method to calculate the thermal boundary layer on a deformable circular cylinder with the satisfactory results is done.